

吉首大学硕士研究生入学考试自命题考试大纲

考试科目代码：821

考试科目名称：高等代数

一、试卷结构

1) 试卷成绩及考试时间

本试卷满分为 150 分，考试时间为 180 分钟。

2) 答题方式：闭卷、笔试。

3) 试卷内容结构

北京大学数学系所编的高等代数第一章至第九章。

4) 题型结构

填空题，6 小题，每小题 5 分，共 30 分；

计算题，4 小题，每小题 15 分，共 60 分；

证明题，5 小题，每小题 12 分，共 60 分。

二、考试内容与考试要求

1、多项式

考试内容

数域，一元多项式，整除的概念，最大公因式，因式分解定理，重因式，多项式函数，复系数与实系数多项式的因式分解，有理系数多项式。

考试要求

- (1) 掌握数域的定义，并会判断一个代数系统是否是数域。
- (2) 正确理解数域 P 上一元多项式的定义，多项式相乘，次数，一元多项式环等概念。掌握多项式的运算及运算律。
- (3) 正确理解整除的定义，熟练掌握带余除法及整除的性质。
- (4) 正确理解和掌握两个（或若干个）多项式的最大公因式，互素等概念及性质。能用辗转相除法求两个多项式的最大公因式。
- (5) 正确理解和掌握不可约多项式的定义及性质。了解因式分解定理。

(6) 正确理解和掌握 k 重因式的定义。

(7) 掌握多项式函数的概念，余数定理，多项式的根及性质。正确理解多项式与多项式函数的关系。

(8) 理解代数基本定理。熟练掌握复（实）系数多项式分解定理及标准分解式。

(9) 正确理解和掌握本原多项式的定义及性质。掌握整系数多项式的有理根的计算。

2、行列式

考试内容

排列， n 级行列式的定义， n 级行列式的性质， n 级行列式的展开，行列式的计算，克拉默(Cramer)法则。

考试要求

(1) 理解并掌握排列、逆序、逆序数、奇偶排列的定义。掌握排列的奇偶性与对换的关系。

(2) 深刻理解和掌握 n 级行列式的定义，并能用定义计算一些特殊行列式。

(3) 熟练掌握行列式的基本性质。

(4) 正确理解矩阵、矩阵的行列式、矩阵的初等变换等概念，能利用行列式性质计算一些简单行列式。

(5) 正确理解元素的余子式、代数余子式等概念。熟练掌握行列式按一行（列）展开的公式。掌握计算行列式的基本方法与技巧。

(6) 熟练掌握克拉默(Cramer)法则，

3、线性方程组

考试内容

消元法， n 维向量空间，线性相关性，矩阵的秩，线性方程组有解判别定理，线性方程组解的结构。

考试要求

(1) 正确理解和掌握一般线性方程组，方程组的解，增广矩阵，线性方程组的初等变换等概念及性质。掌握阶梯形方程组的特征及作用。会求线性方程组的一般解。

(2) 理解和掌握 n 维向量及两个 n 维向量相等的定义。熟练掌握向量的运算规律和性质。

(3) 正确理解和掌握线性组合、线性相关、线性无关的定义及性质。掌握两个向量组等价的定义及等价性质定理。深刻理解向量组的极大无关组、秩的定义，并会求向量组的一个极大无关组。

(4) 深刻理解和掌握矩阵的行秩、列秩，以及矩阵的秩的定义。掌握矩阵的秩与其子式的关系。

(5) 熟练掌握线性方程组的有解判别定理。理解和掌握线性方程组的公式解。

(6) 正确理解和掌握齐次线性方程组的基础解系。了解解空间的概念。熟练掌握基础解系的求法、线性方程组的结构定理。并对有解的一般线性方程组，会求其全部解。

4、矩阵

考试内容

矩阵的概念，矩阵的运算，矩阵乘积的行列式与秩，矩阵的逆，矩阵的分块，初等矩阵，分块乘法的初等变换及应用。

考试要求

- (1) 掌握矩阵的加法、数乘、乘法、转置等运算及其计算规律。
- (2) 掌握矩阵乘积的行列式定理，矩阵乘积的秩与它的因子的秩的关系。
- (3) 正确理解和掌握可逆矩阵、逆矩阵、伴随矩阵等概念，掌握一个 n 阶方阵可逆的充要条件和用公式法求一个矩阵的逆矩阵。
- (4) 理解分块矩阵的意义，掌握分块矩阵的加法、乘法的运算及性质。
- (5) 正确理解和掌握初等矩阵、初等变换等概念及它们之间的关系，熟练掌握一个矩阵的等价标准形和矩阵可逆的充要条件；会用初等变换的方法求一个方阵的逆矩阵。
- (6) 理解分块乘法的初等变换，会求分块矩阵的逆。

5、二次型

考试内容

二次型的矩阵表示，标准型，唯一性，正定（半正定）二次型。

考试要求

- (1) 正确理解二次形和非退化线性替换的概念，掌握二次型的矩阵表示及二次型与对称矩阵的一一对应关系，掌握矩阵的合同概念及性质。

- (2) 理解二次型的标准形, 掌握化二次型为标准形的两种基本方法。
- (3) 正确理解复数域和实数域上二次型的规范性的唯一性, 了解符号差、惯性指数等概念, 掌握惯性定理的证明思想。
- (4) 正确理解正定、半正定、负定二次型及正定、半正定矩阵等概念, 熟练掌握正定二次型(半正定二次型)的若干等价条件。

6、线性空间

考试内容

集合、映射, 线性空间的定义与简单性质, 维数、基与坐标, 基变换与坐标变换, 线性子空间, 子空间的交与和, 子空间的直和, 线性空间的同构。

考试要求

- (1) 正确理解和掌握线性空间的定义及性质, 会判断一个代数系统是否为线性空间。
- (2) 理解线性组合、线性表示、线性相关、线性无关等概念, 正确理解和掌握 n 维线性空间的概念及性质。
- (3) 基变换与坐标变换的关系。
- (4) 正确理解和掌握基之间的过渡矩阵及其性质。
- (5) 正确理解线性子空间的定义及判别定理, 掌握线性方程组的解空间的概念和性质, 掌握向量组生成子空间的定义及等价条件。
- (6) 掌握子空间的交与和的定义及性质, 掌握维数公式并能熟练运用。
- (7) 深刻理解子空间的直和的概念, 以及判断直和的若干充要条件。

7、线性变换

考试内容

线性变换的定义, 线性变换的运算, 线性变换的矩阵, 特征值与特征向量, 对角矩阵, 线性变换的值域与核, 不变子空间, 若尔当(Jordan)标准形介绍, 最小多项式。

考试要求

- (1) 理解和掌握线性变换的定义及性质。
- (2) 掌握线性变换的运算及运算规律, 理解线性变换的多项式。
- (3) 深刻理解和掌握线性变换与矩阵的联系, 掌握矩阵相似的概念和线性变换在不同基下的矩阵相似等性质。
- (4) 理解和掌握矩阵的特征值、特征向量、特征多项式的概念和性质, 会求一个矩阵的特征值和特征向量, 掌握相似矩阵与它们的特征多项式的关系及哈密顿-凯莱定理。

(5) 掌握 n 维线性空间中一个线性变换在某一组基下的矩阵为对角矩阵的充要条件。

(6) 掌握线性变换的值域、核、秩、零度等概念，深刻理解和掌握线性变换的值域与它对应的矩阵的秩的关系及线性变换的秩和零度间的关系。

(7) 掌握不变子空间的定义，会判定一个子空间是否是 A -子空间，深刻理解不变子空间与线性变换矩阵化简之间的关系，掌握将线性空间按特征值分解成不变子空间的直和。

(8) 了解若尔当(Jordan)标准形及其相关性质。

(9) 掌握最小多项式的定义和基本性质，会求任意 Jordan 标准形矩阵的最小多项式。

8. λ -矩阵

考试内容

λ -矩阵的定义及其标准形，行列式因子，不变因子，初等因子，矩阵相似的充要条件，若当标准形和有理标准形的推导。

考试要求

(1) 理解 λ -矩阵的定义及初等变换。

(2) 深刻理解和掌握 λ -矩阵的标准形。

(3) 深刻理解行列式因子，不变因子，初等因子的定义，会求这些因子，弄清楚它们之间的联系。

(4) 理解和掌握矩阵的矩阵相似的充要条件。

(5) 掌握若当标准形和有理标准形的计算过程。

9、欧几里德空间

考试内容

定义与基本性质，标准正交基，同构，正交变换，子空间，实对称矩阵的相似标准形，向量到子空间的距离，最小二乘法。

考试要求

(1) 深刻理解欧氏空间的定义及性质，深刻理解内积的本质，掌握向量的长度，两个向量的夹角、单位向量、正交及度量矩阵等概念和基本性质，掌握各种概念之间的联系和区别。

(2) 正确理解正交向量组、标准正交基的概念，掌握施密特正交化过程，并能把一组线性无关的向量化为单位正交的向量。

(3) 正确理解和掌握正交变换的概念及几个等价关系，掌握正交变换与向量的长度，标准正交基，正交矩阵间的关系。

(4) 正确理解和掌握两个子空间正交的概念，掌握正交与直和的关系，以及有限维欧氏空间中的每一个子空间都有唯一的正交补的性质。

(5) 深刻理解并掌握任一实对称矩阵均可正交相似于一个对角阵, 并掌握求正交阵的方法。能用正交变换化实二次型为标准型。

(6) 正确计算向量之间的距离, 了解最小二乘法原理。

三、参考书目

1、北京大学数学系编, 高等代数 (第六版), 高等教育出版社, 北京 (2025)。

2、张禾瑞, 郝炳新编, 高等代数 (第五版), 高等教育出版社, 北京 (2008)。